

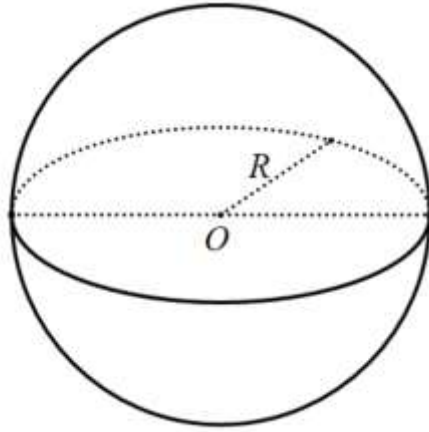
BÀI 3: MẶT CẦU

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. MẶT CẦU. KHỐI CẦU

1. Định nghĩa 1: Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R không đổi được gọi là *mặt cầu* có tâm là O và bán kính bằng R , kí hiệu $S(O; R)$.

Như vậy: Mặt cầu $S(O; R) = \{M \mid OM = R\}$.



2. Vị trí tương đối giữa điểm và mặt cầu:

Cho điểm A và mặt cầu $S(O; R)$. Ta có:

- ☐ Điểm A thuộc mặt cầu $\Leftrightarrow OA = R$.
- ☐ Điểm A nằm trong mặt cầu $\Leftrightarrow OA < R$.
- ☐ Điểm A nằm ngoài mặt cầu $\Leftrightarrow OA > R$.

3. Định nghĩa 2: Tập hợp các điểm thuộc mặt cầu $S(O; R)$ cùng với các điểm nằm trong mặt cầu đó được gọi là khối cầu $S(O; R)$.

Như vậy: Khối cầu $S(O; R) = \{M \mid OM \leq R\}$.

II. GIAO CỦA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẪNG

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P) . Khi đó $h = OH$ là khoảng cách từ O tới mặt phẳng (P) . Ta có ba trường hợp sau:

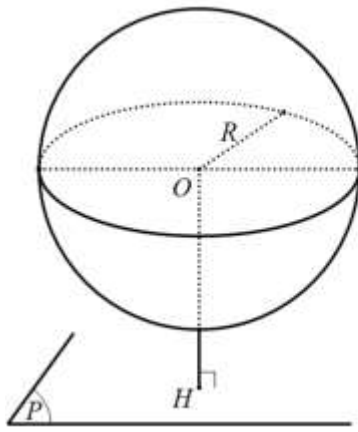
1. Nếu $h > R$: mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu.
2. Nếu $h = R$: mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tại điểm H . Ta có $OH \perp (P)$.

Điểm H gọi là tiếp điểm của mặt cầu $S(O; R)$ và mặt phẳng (P) , mặt phẳng (P) gọi là mặt phẳng tiếp xúc hay tiếp diện của mặt cầu.

Vậy ta có: Điều kiện cần và đủ để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$ tại điểm H là (P) vuông góc với bán kính OH tại điểm H đó.

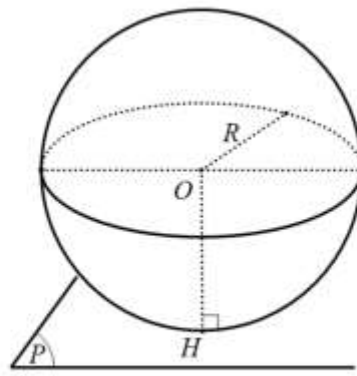
3. Nếu $h < R$: mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo đường tròn có bán kính $r = \sqrt{R^2 - h^2}$.

Đặc biệt khi $h = 0$ mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo một đường tròn lớn có bán kính $r = R$.



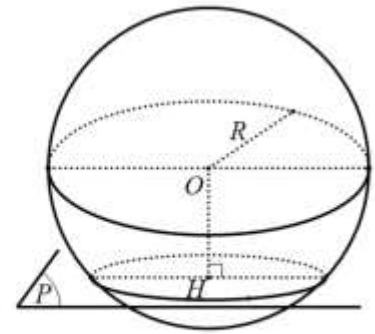
$$OH > R$$

(P) và (S) không có điểm chung



$$OH = R$$

(P) tiếp xúc (S) tại H



$$OH < R$$

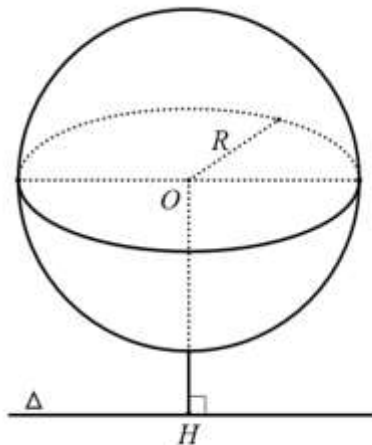
(P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn

III. GIAO CỦA MẶT CẦU VỚI ĐƯỜNG THẲNG. TIẾP TUYẾN CỦA MẶT CẦU

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và đường thẳng Δ . Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm O và $d = OH$ là khoảng cách từ O đến Δ .

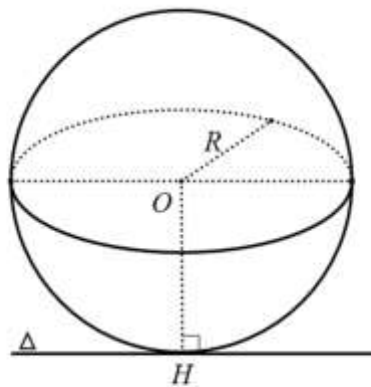
Tương tự như trong trường hợp mặt cầu và mặt phẳng, ta có ba trường hợp sau đây:

1. Nếu $d < R$, đường thẳng Δ cắt mặt cầu tại hai điểm M, N .
2. Nếu $d = R$, đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu tại một điểm H (H gọi là tiếp điểm và đường thẳng Δ gọi là tiếp tuyến của mặt cầu).
3. Nếu $d > R$, đường thẳng Δ không cắt mặt cầu.



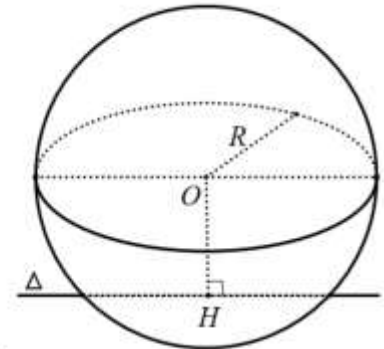
$$OH > R$$

Δ và (S) không có điểm chung



$$OH = R$$

Δ tiếp xúc (S) tại H



$$OH < R$$

Δ cắt (S) tại hai điểm phân biệt

Đặc biệt, khi $d = 0$ thì đường thẳng Δ đi qua tâm O và cắt mặt cầu tại hai điểm A, B . Khi đó AB là đường kính của mặt cầu.

Nhận xét: Người ta chứng minh được rằng:

a) Qua một điểm A nằm trên mặt cầu $S(O; R)$ có vô số tiếp tuyến của mặt cầu đó. Tất cả các tiếp tuyến này đều vuông góc với bán kính OA của mặt cầu tại A và đều nằm trên mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm A đó.

b) Qua một điểm A nằm ngoài mặt cầu $S(O; R)$ có vô số tiếp tuyến với mặt cầu đã cho. Các tiếp tuyến này tạo thành một mặt nón đỉnh A . Khi đó độ dài các đoạn thẳng kẻ từ A đến các tiếp điểm đều bằng nhau.

Chú ý. Người ta nói mặt cầu nội tiếp hình đa diện nếu mặt cầu đó tiếp xúc với tất cả các mặt của hình đa diện, còn nói mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện nếu tất cả các đỉnh của hình đa diện đều nằm trên mặt cầu.

Khi mặt cầu nội tiếp (ngoại tiếp) hình đa diện, người ta cũng nói hình đa diện ngoại tiếp (nội tiếp) mặt cầu.

IV. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH KHỐI CẦU

Mặt cầu bán kính R có diện tích là: $S = 4\pi R^2$.

Khối cầu bán kính R có thể tích là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Chú ý:

a) Diện tích S của mặt cầu bán kính R bằng bốn lần diện tích hình tròn lớn của mặt cầu đó.

b) Thể tích V của khối cầu bán kính R bằng thể tích khối chóp diện tích đáy bằng diện tích mặt cầu và có chiều cao bằng bán kính của khối cầu đó.

DẠNG 1. Vị trí tương đối :

VÍ DỤ 1: Cho mặt cầu $S(O; r)$. Chọn khẳng định **đúng**.

A. $S(O; r) = \{M \mid OM = r\}$.

B. $S(O; r) = \{M \mid OM > r\}$.

C. $S(O; r) = \{M \mid OM < r\}$.

D. $S(O; r) = \{M \mid OM \geq r\}$.

VÍ DỤ 2: Nếu hai điểm C, D nằm trên mặt cầu $S(O; r)$ thì đoạn thẳng CD được gọi là:

A. Cung của mặt cầu.

B. Bán kính của mặt cầu.

C. Đường kính của mặt cầu.

D. Dây cung của mặt cầu.

VÍ DỤ 3: Chọn phát biểu **sai**.

A. Một mặt cầu được xác định nếu biết đường kính của nó.

B. Một mặt cầu được xác định nếu biết dây cung của nó.

C. Một mặt cầu được xác định nếu tâm và một điểm thuộc mặt cầu đó.

D. Một mặt cầu được xác định nếu biết tâm và bán kính của nó.

VÍ DỤ 4: Cho mặt cầu $S(O; r)$ và một điểm A bất kỳ trong không gian. Chọn khẳng định **sai**.

A. Nếu $OA = r$ thì điểm A nằm trên mặt cầu $S(O; r)$.

B. Nếu $OA < r$ thì điểm A nằm trong mặt cầu $S(O; r)$.

C. Nếu $OA > r$ thì điểm A nằm ngoài mặt cầu $S(O; r)$.

D. Nếu $OA \leq r$ thì điểm A thuộc mặt cầu $S(O; r)$.

VÍ DỤ 5: Chọn phát biểu **sai**.

- A. Tập hợp các điểm thuộc mặt cầu $S(O;r)$ cùng các điểm nằm trong mặt cầu đó được gọi là khối cầu tâm O , bán kính r .
- B. Dây cung đi qua tâm của mặt cầu là một đường kính của mặt cầu đó.
- C. Hình biểu diễn của mặt cầu là một hình elip.
- D. Đường kính là dây cung lớn nhất.

VÍ DỤ 6: Cho mặt cầu $S(O;r)$ và mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P) . Chọn khẳng định **sai**.

- A. Nếu $OH > r$ thì mặt phẳng (P) không có điểm chung với mặt cầu $S(O;r)$.
- B. Nếu $OH \geq r$ thì mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu $S(O;r)$.
- C. Nếu $OH < r$ thì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $S(O;r)$ theo đường tròn tâm H , bán kính $\sqrt{r^2 - OH^2}$.
- D. Nếu $OH = r$ thì mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O;r)$ tại H .

2. DẠNG 2: TÍNH DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH KHỐI CẦU

Phương pháp giải: Sử dụng công thức:

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.

Thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

VÍ DỤ 1: Mặt cầu có bán kính $R\sqrt{3}$ có diện tích là:

- A. $4\sqrt{3}\pi R^2$.
- B. $4\pi R^2$.
- C. $6\pi R^2$.
- D. $12\pi R^2$.

Giải:

Chọn D

Áp dụng công thức: $S = 4\pi R^2$

Diện tích mặt cầu có bán kính $R\sqrt{3}$ là: $S = 4\pi (R\sqrt{3})^2 = 12\pi R^2$.

VÍ DỤ 2: Mặt cầu có bán kính $R\sqrt{6}$ có thể tích là:

- A. $\frac{4\sqrt{6}}{3}\pi R^3$.
- B. $8\sqrt{6}\pi R^3$.
- C. $4\sqrt{6}\pi R^3$.
- D. $8\pi R^3$.

Giải:

Chọn B

Áp dụng công thức: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Thể tích khối cầu có bán kính $R\sqrt{6}$ là: $V = \frac{4}{3}\pi (R\sqrt{6})^3 = 8\sqrt{6}\pi R^3$.

VÍ DỤ 3: Cho hình tròn đường kính $4a$ quay quanh đường kính của nó. Khi đó thể tích khối tròn xoay sinh ra bằng:

- A. $\frac{32}{3}\pi a^3$.
- B. $\frac{4}{3}\pi a^3$.
- C. $\frac{8}{3}\pi a^3$.
- D. $\frac{64}{3}\pi a^3$.

Giải:

Chọn A

Cho hình tròn đường kính $4a$ quay quanh đường kính của nó ta được khối cầu có đường kính $4a$ hay bán kính $R = 2a$.

Thể tích khối cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(2a)^3 = \frac{32}{3}\pi a^3$.

VÍ DỤ 4: Khối cầu có thể tích bằng $36\pi(\text{cm}^3)$ có bán kính là:

- A. $3\sqrt{3}(\text{cm})$. B. $2(\text{cm})$. C. $3(\text{cm})$. D. $27(\text{cm})$.

Giải:

Chọn C

Ta có: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow 36\pi = \frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow R^3 = 27 \Leftrightarrow R = 3$.

VÍ DỤ 5: Khối cầu có diện tích bằng $32\pi a^2$ có bán kính là:

- A. $2a$. B. $3a$. C. $4a$. D. $2\sqrt{2}a$.

Giải:

Chọn D

Ta có: $S = 4\pi R^2 \Leftrightarrow 32\pi a^2 = 4\pi R^2 \Leftrightarrow R^2 = 8a^2 \Leftrightarrow R = 2\sqrt{2}a$.